(1974. 10. 15 受理)

Navier–Stokes 方程式の初期値問題について

森　本　浩　子

On the Navier-Stokes initial value problem

Hiroko MORIMOTO

Synopsis

Let A be the Stokes operator in $H_\sigma(\Omega)$, P the projection from $L_2(\Omega)$ onto $H_\sigma(\Omega)$, $Fu=-P(u\cdot\mathrm{grad})u$. The Navier-Stokes initial value problem is written as

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=-Au+Fu+Pf, & t>0,\\ \mathrm{u}(+0)=a\end{cases}$$

where f and a are given vectors. The existence and the uniqueness of solutions of the problem (I) are proved in the space

$$\mathscr{S}_T=\{u:(0,T]\to D(A^{\frac{5}{8}})\text{ continuous; } \sup_{0<t<T}\|t^{\frac{3}{8}}A^{\frac{5}{8}}u(t)\|<+\infty\}.$$

§1. はじめに

Ω は R^3 における有界な領域で，その境界 $\partial\Omega$ は滑らかとする。Navier-Stokes 方程式系は，

$$(1\text{-}1)\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\Delta u-\mathrm{grad}\,p-(u\cdot\mathrm{grad})u+f, & x\in\Omega,\ t>0,\\ \mathrm{div}\,u=0, & x\in\Omega,\ t>0,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ u=a, & x\in\Omega,\ t=0,\end{cases}$$

で与えられる。ここで $u=u(x,t)$ は流速をあらわすベクトル，$p=p(x,t)$ は圧力，$f=f(x,t)$ は外力ベクトル，$a=a(x)$ は初期速度ベクトルである。この方程式系は，

$$(1\text{-}2)\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=-Au+Fu+Pf\ , & t>0,\\ u(+0)=a\end{cases}$$

と変形出来る。ここで P は，$L_2(\Omega)$ から $H_\sigma(\Omega)$ の上への射影作用素，A は形式的には $-P\Delta$ で与えられる Stokes 作用素，F は $Fu=-P(u\cdot\mathrm{grad})u$ である。我々は，この抽象的常微分方程式の解の存在と一意性について調べる。§2では，種々の関数空間を定義し，それらの若干の性質を述べる。§3 では，Stokes 作用素の基本的性質を考察，§4 では，非線型項 Fu について調べる。方程式 (1-2) の解の一意存在となめらかさについては，$Pf=0$ のときは §5 で，$Pf\neq0$ のときは §6 で述べる。

§2. 記　　　号

関数は特に断らない限り，3次元実ベクトル空間に値をとるものとする。$L_p(\Omega)$ は Ω 上で定義された p 乗可積分な実数値関数を成分とするベクトル全体，$W_p{}^l(\Omega)$ $(l=1,2,\cdots)$ は l 階までの全ての導関数が $L_p(\Omega)$ に属するようなベクトル値関数全体とする。$L_p(\Omega)$，$W_p{}^l(\Omega)$ のノルムを

(2-1)　$\|f\|_{L_p(\Omega)}=\left[\int_\Omega\{|f_1(x)|^p+|f_2(x)|^p+|f_3(x)|^p\}dx\right]^{1/p}$

(2-2)　$\|f\|_{W_p{}^l(\Omega)}=\sum_{|\alpha|\leqq l}\|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)},$

とする。但し

$$\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\qquad \alpha_i \text{ は非負整数,}$$

$$|\alpha|=\sum_{i=1}^3\alpha_i$$

$$D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1{}^{\alpha_1}\partial x_2{}^{\alpha_2}\partial x_3{}^{\alpha_3}}$$

である。

2つの Banach 空間 X と Y の複素補間空間を $[X,\ Y]_\theta$ とかく（[1]）。σ が整数でないとき，すなわち $\sigma=l+\theta$，l は整数，$0<\theta<1$ のとき

$$H_p{}^\sigma(\Omega)=[W_p{}^{l+1}(\Omega),\ W_p{}^l(\Omega)]_\theta$$

$\sigma=l$ のとき

$$H_p{}^l(\Omega)=W_p{}^l(\Omega)$$

と定義する。これらの空間の間には，次の包含関係がある。

定理 2-1（[8]）

Ω は R^3 の有界領域で，その境界 $\partial\Omega$ はなめらかとする。$\sigma>\tau$，$\dfrac{1}{p}-\dfrac{\sigma-\tau}{3}\leqq\dfrac{1}{q}$，$1<p<q<+\infty$ のとき

$$H_p{}^\sigma(\Omega)\subset H_q{}^\tau(\Omega)$$

が成立つ。

$p=2$ のとき特に $H_2{}^\sigma(\Omega)=H^\sigma(\Omega)$，$H_2{}^0(\Omega)=L_2(\Omega)$ と書く。定理 2-1 により，包含関係

$$H^{\frac{5}{4}}(\Omega)\subset=W_{\frac{12}{5}}{}^1(\Omega)\subset L_{12}(\Omega)$$

を得る。この事実は §4 で用いられる。

$C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ は Ω にコンパクトな台を持ち，無限回連続微分可能なベクトル値関数 φ で，$\mathrm{div}\,\varphi=0$ $(x\in\Omega)$ をみたすもの全体とする。$C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ の $L_2(\Omega)$ における閉包を $H_\sigma(\Omega)$ と書く。u は $\overline{\Omega}$ でなめらかな関数とする。このとき，$u\in H_\sigma(\Omega)$ は

$$\mathrm{div}\,u=0\quad(x\in\Omega),\quad u_n=0\quad(x\in\partial\Omega)$$

に同値である。ここで u_n は u の法線成分である。$H_\sigma(\Omega)$ の直交補空間を $H_\tau(\Omega)$ と書く。す

なわち

$$L_2(\Omega)=H_\sigma(\Omega)\oplus H_\tau(\Omega)$$

とする。$H_\tau(\Omega)$ は実は，grad h とあらわされる元全体からなる。但し h はスカラー値関数である。

R^1 の区間 I で定義され，Banach 空間 X で値をとる関数 $w(t)$ が，次の条件

$$\|w(t)-w(s)\|_X \leqq c|t-s|^\theta \qquad (\theta>0)$$

をみたすとき，w は I で θ 次 Hölder 連続であるという。但し c は t, $s\in I$ に関係しない正定数である。I で θ 次 Hölder 連続な関数全体を $C^\theta(I:X)$ と書く。$\theta=1$ のとき，特に Lipschitz 連続であるという。

§3, Stokes 作用素

$L_2(\Omega)$ から $H_\sigma(\Omega)$ の上への射影作用素を P と書く。Stokes 作用素 A は，$C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$ 上で定義された正値対称作用素 $-P\Delta$ の $H_\sigma(\Omega)$ における Friedrichs 拡張として与えられる（[2]）。A は $H_\sigma(\Omega)$ における正値自己共役作用素で，$Au=Pf$ は，方程式系

$$\begin{cases} -\triangle u+\mathrm{grad}\, p=f, & x\in\Omega, \\ \mathrm{div}\, u=0, & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

に同値である。Stokes 作用素の分数巾 $A^\alpha(0<\alpha<1)$ の定義域については次の結果が知られている。作用素 B は

$$Bu=f \iff \begin{cases} -\triangle u=f, & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

で定義された，$L_2(\Omega)$ における正値自己共役作用素とすれば，次の定理が成立つ。

定理 3-1（[3]）

$$D(A^\alpha)=D(B^\alpha)\cap H_\sigma(\Omega) \qquad (0<\alpha<1)$$

等号はノルムが同等なことを示す。すなわち

$$\|u\|_{D(A^\alpha)}=\|A^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}$$

と

$$\|u\|_{D(B^\alpha)}=\|B^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}$$

とは同等である。

定理 3-1 は，補間法の一般論を用いて〔3〕で証明されている。実は一般化された Heinz の不等式（[5]）からも導びかれることが〔7〕に注意してある。

$D(B^\alpha)$ の特徴付けに関しては次の結果がある。

定理 3-2（[4]）

$$D(B^\alpha)=\begin{cases} H^{2\alpha}(\Omega), & \frac{1}{4}>\alpha>0, \\ \{u\in H^{\frac{1}{2}}(\Omega);\ \rho^{-\frac{1}{2}}u\in L_2(\Omega)\}, & \alpha=\frac{1}{4}, \\ \{u\in H^{2\alpha}(\Omega);\ u=0 \quad (x\in\partial\Omega)\}, & 1\geqq\alpha>\frac{1}{4} \end{cases}$$

である。但し $\rho=\rho(x)$ は x の $\partial\Omega$ からの距離をあらわす。

上記二定理により $D(A^\alpha)$ を具体的に知ることが出来る。これは，方程式 (1-2) の解の性質を記述する際に，有用である。

作用素 A の性質をさらに調べよう。A は Hilbert 空間 $H_\sigma(\Omega)$ における正値自己共役作用素であるから，そこで，解析的半群 e^{-tA} を生成する（たとえば〔6〕)。$H_\sigma(\Omega)$ におけるノルムを $\|\cdot\|$ であらわすことにしよう。

補題 3-3，補題 3-4 は〔2〕に述べられているが，念のために証明を付す。

補題 3-3

1）$\alpha>0$，$u\in H_\sigma(\Omega)$ に対して

$$\|A^\alpha e^{-tA}u\|\leqq C_\alpha t^{-\alpha}\|u\|$$

が成立つ。C_α は t，u によらない定数で $\alpha\leqq e$ のときは 1 ととれる。

2 $\|t^\alpha A^\alpha e^{-tA}u\|\to 0$　　$(t\to 0)$　である。

証明

A のスペクトル分解を $\{E_\lambda\}_{\lambda>0}$ とすれば，

$$A^\alpha e^{-tA}u=\int_0^\infty \lambda^\alpha e^{-t\lambda}dE_\lambda u$$

とあらわせる。これより

i) $$\|A^\alpha e^{-tA}u\|^2=\int_0^\infty \lambda^{2\alpha}e^{-2t\lambda}d\|E_\lambda u\|^2$$

であるが，不等式

$$\lambda^{2\alpha}e^{-2t\lambda}\leqq\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{2\alpha}t^{-2\alpha}\qquad(t>0)$$

が成立つから，$C_\alpha=\left(\dfrac{\alpha}{e}\right)^\alpha$　として，i) が成立つ。

ii）任意の $v\in D(A^\alpha)$ に対して，

$$\|t^\alpha A^\alpha e^{-tA}u\|\leqq\|t^\alpha A^\alpha e^{-tA}(u-v)\|+\|t^\alpha A^\alpha e^{-tA}v\|$$

である。前段より

$$\|t^\alpha A^\alpha e^{-tA}(u-v)\|\leqq C_\alpha\|u-v\|$$

$v\in D(A^\alpha)$ であるから

$$\|t^\alpha A^\alpha e^{-tA}v\|=\|t^\alpha e^{-tA}A^\alpha v\|\leqq t^\alpha\|A^\alpha v\|$$

である。よって

$$\|t^\alpha A^\alpha e^{-tA}u\|\leqq C_\alpha\|u-v\|+t^\alpha\|A^\alpha v\|$$

を得る。$D(A^\alpha)$　$(0<\alpha<1)$ は $H_\sigma(\Omega)$ で稠密であるから，ii) が成立つ。　　証明終り。

補題 3-4

$1\geqq\alpha>0$ とする。$u\in D(A^\alpha)$ ならば

$$\|(e^{-hA}-1)u\|\leqq\frac{h^\alpha}{\alpha}\|A^\alpha u\|\qquad(h>0)$$

が成立つ。

証明

$$(e^{-hA}-1)u=\int_0^h \frac{d}{dt}e^{-tA}u\,dt=-\int_0^h Ae^{-tA}u\,dt=-\int_0^h A^{1-\alpha}e^{-tA}A^{\alpha}u\,dt$$

である。ここで $u\in D(A^{\alpha})$ を用いた。

補題 3-3 より

$$\|A^{1-\alpha}e^{-tA}A^{\alpha}u\|\leqq t^{\alpha-1}\|A^{\alpha}u\|$$

であるから

$$\|(e^{-hA}-1)u\|\leqq\int_0^h t^{\alpha-1}dt\|A^{\alpha}u\|=\frac{h^{\alpha}}{\alpha}\|A^{\alpha}u\|$$

が成立つ。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　証明終り。

補題 3-5

$T>0$ とする。$g(t)$ は区間 $I=[0,\ T]$ で定義され $H_{\sigma}(\Omega)$ で値をとる有界可測関数とし

$$v(t)=\int_0^t e^{-(t-s)A}g(s)ds$$

とおく。このとき，任意の $\alpha(0<\alpha<1)$ に対して，$v(t)\in D(A^{\alpha})$ かつ $A^{\alpha}v(t)\in C^{1-\alpha}(I:H_{\sigma}(\Omega))$ である。

証明

補題 3-3 を用いれば，

$$\int_0^t \|A^{\alpha}e^{-(t-s)A}g(s)\|ds\leqq\int_0^t (t-s)^{-\alpha}ds\sup_{0<s<t}\|g(s)\|\leqq\frac{1}{1-\alpha}t^{1-\alpha}\sup_{0<s<T}\|g(s)\|$$

が成立つ。A^{α} は閉作用素であるから，$v(t)\in D(A^{\alpha})$ を得る。次に $A^{\alpha}v(t)$ の Hölder 連続性を調べよう。まず，

i) $t=0$ のとき，任意の $h>0$ に対して，

$$\|A^{\alpha}v(h)-A^{\alpha}v(0)\|=\left\|\int_0^h A^{\alpha}e^{-(t-s)A}g(s)ds\right\|\leqq\frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha}\sup_{0<s<T}\|g(s)\|$$

であるから，$1-\alpha$ 次 Hölder 連続である。

ii) $t>0$ のとき

$$A^{\alpha}v(t+h)-A^{\alpha}v(t)=A^{\alpha}\int_0^t\{e^{-(t+h-s)A}-e^{-(t-s)A}\}g(s)ds+A^{\alpha}\int_t^{t+h}e^{-(t+h-s)A}g(t)ds \tag{3-1}$$

とあらわす。右辺第二項は，A^{α} が閉作用素であるから，A^{α} を積分記号の内へ入れることが出来て，

$$\left\|\int_t^{t+h}A^{\alpha}e^{-(t+h-s)A}g(s)ds\right\|\leqq\int_t^{t+h}(t+h-s)^{-\alpha}ds\sup_{0<s<T}\|g(s)\|=\frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha}\sup_{0<s<T}\|g(s)\|$$

と評価される。次に

$$\int_0^t \{e^{-(t+h-s)A} - e^{-(t-h)A}\} g(s)ds = \int_0^t \left\{ \int_0^h A e^{-(t+\tau-s)A} g(s) d\tau \right\} ds$$

に注意して，(3-1) 右辺第一項を評価すれば，

$$(3\text{-}2)\quad \int_0^t ds \int_0^h \|A^{\alpha+1} e^{-(t+\tau-s)A} g(s)\| d\tau \leqq \int_0^t ds \int_0^h (t+\tau-s)^{-\alpha-1} d\tau \sup_{0<s<T} \|g(s)\|$$

$$= \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \{t^{1-\alpha} - (t+h)^{1-\alpha} + h^{1-\alpha}\} \sup_{0<s<T} \|g(s)\|$$

となる。ここで {……} を調べよう。

$$t^{1-\alpha} - (t+h)^{1-\alpha} + h^{1-\alpha} = h^{1-\alpha}\{\sigma^{1-\alpha} - (1+\sigma)^{1-\alpha} + 1\} \qquad \left(\sigma = \frac{t}{h}\right)$$

と変形する。t に関して h は十分小さいから，

$$-1 < \sigma^{1-\alpha} - (1+\sigma)^{1-\alpha} < 0 \qquad (\sigma > 1)$$

であることに注意すれば，

$$0 < t^{1-\alpha} - (t+h)^{1-\alpha} + h^{1-\alpha} < h^{1-\alpha}$$

が，すべての $t>0$ に対して成立つ。よって (3-1) 右辺第一項も $1-\alpha$ 次 Hölder 連続であることが示された。以上より

$$\|A^\alpha v(t+h) - A^\alpha v(t)\| \leqq \frac{1+\alpha}{\alpha(1-\alpha)} h^{1-\alpha} \sup_{0<s<T} \|g(s)\|$$

がすべての $t \in (0, T)$ に対して成立つ。i) ii) より補題 3-5 は証明された。

補題 3-6

$T>0$ とする。$g(t)$ は閉区間 $I=[0, T]$ で定義され，$H_\sigma(\Omega)$ で値をとる θ 次 Hölder 連続な関数とする。このとき

$$v(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} g(s) ds$$

とおけば，$v(t) \in D(A)$ かつ $Av(t) \in C^\theta(I; H_\sigma(\Omega))$ である。

証明

仮定より

$$\|g(t) - g(s)\| \leqq M|t-s|^\theta$$

となる正定数 M がある。

$$v(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A}\{g(s) - g(t)\} ds + \int_0^t e^{-(t-s)A} g(t) ds = v_1(t) + v_2(t)$$

と分解する。まず $v_1(t)$ を調べよう。

$$\left\| \int_0^t A e^{-(t-s)A}\{g(s) - g(t)\} ds \right\| \leqq M \int_0^t (t-s)^{-1}(t-s)^\theta ds = \frac{M}{\theta} t^\theta$$

が成立つ。A は閉作用素であるから，これより $v_1(t) \in D(A)$ が従う。$t+h$, $t \in (0, T)$,

$h>0$ として,

$$v_1(t+h)-v_1(t)=\int_0^t\{e^{-(t+h-s)A}-e^{-(t-s)A}\}\{g(s)-g(t)\}ds+\int_0^t e^{-(t+h-s)A}\{g(t)-g(t+h)\}ds$$
$$+\int_t^{t+h} e^{-(t+h-s)A}\{g(s)-g(t+h)\}ds=\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3$$

と分解する。

$$\varphi_1=-\int_0^t ds\int_0^h Ae^{-(t+\tau-s)A}\{g(s)-g(t)\}d\tau$$

であるから,

$$\|A\varphi_1\|\leqq M\int_0^t\left\{\int_0^h(t+\tau-s)^{-2}(t-s)^\theta d\tau\right\}ds$$
$$=M\int_0^t(t-s)^\theta\{(t-s)^{-1}-(t+h-s)^{-1}\}ds\leqq Mh^\theta\int_0^\infty\frac{\sigma^{\theta-1}}{1+\sigma}d\sigma$$

と評価できる。但し $\sigma h=t-s$ とおいた。$0<\theta<1$ であるから積分

$$\int_0^\infty\frac{\sigma^{\theta-1}}{1+\sigma}d\sigma$$

は収束する。その値を c とすれば，評価

$$\|A\varphi_1\|\leqq Mch^\theta$$

を得る。次に $A\varphi_2$ を調べよう。

$$A\varphi_2=\int_0^t Ae^{-(t+h-s)A}\{g(t)-g(t+h)\}ds=\int_0^t\frac{d}{ds}e^{-(t+h-s)A}\{g(t)-g(t+h)\}ds$$
$$=\{e^{-hA}-e^{-(t+h)A}\}\{g(t)-g(t+h)\}$$

である。$\|e^{-tA}\|\leqq 1$ であるから

$$\|A\varphi_2\|\leqq 2Mh^\theta$$

が成立つ。$A\varphi_3$ については,

$$\|A\varphi_3\|\leqq M\int_t^{t+h}(t+h-s)^{-1}(t+h-s)^\theta ds=M\frac{h^\theta}{\theta}$$

となる。以上より $Av_1(t)$ は θ 次 Hölder 連続である。次に $v_2(t)$ を調べよう。

$$\int_0^t Ae^{-(t-s)A}g(t)ds=(1-e^{-tA})g(t)$$

であるが，A は閉作用素であるから，$v_2(t)\in D(A)$ を得る。一方 $t>s$ として

$$Av_2(t)-Av_2(s)=g(t)-g(s)-\{e^{-tA}g(t)-e^{-sA}g(s)\}$$
$$=(1-e^{-tA})\{g(t)-g(s)\}-\{e^{-(t-s)A}-1\}e^{-sA}g(s)$$

であるから,

$$\|Av_2(t)-Av_2(s)\|\leqq 2M|t-s|^\theta+\frac{|t-s|^\theta}{\theta}\|A^\theta e^{-sA}g(s)\|$$

を得る。ここで補題3-4を用いた。よって $Av_2(t)$ は θ 次 Hölder 連続である。v_1 と v_2 についての結果をあわせて，Av の θ 次 Hölder 連続性を得る。　　　　　証明終り。

§4.　非線型作用素 F

方程式 (1-2) における非線型項 Fu の存在は，この方程式の取扱いを困難にしている一要素である。作用素 F は，

$$Fu=-P(u\cdot\mathrm{grad})u=-P\left(\sum_{j=1}^{3}u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)u$$

で定義される。F の性質を調べよう。

補題 4-1

u，$v\in D(A^{\frac{5}{8}})$ とする。このとき，Ω のみによる定数 C_0 が存在して

i)　$\|Fu\|\leqq C_0\|A^{\frac{5}{8}}u\|^2$

ii)　$\|Fu-Fv\|\leqq C_0(\|A^{\frac{5}{8}}u\|+\|A^{\frac{5}{8}}v\|)\|A^{\frac{5}{8}}(u-v)\|$

が成立つ。

証明

定理 3-2 によれば，$u\in D(A^{\frac{5}{8}})$ ならば，$u\in H^{\frac{5}{4}}(\Omega)$ である。一方，定理 2-1 によれば，

$$H^{\frac{5}{4}}(\Omega)\subset W_{\frac{12}{5}}{}^{1}(\Omega)\subset L_{12}(\Omega)$$

であるから，u はもちろん $W_{\frac{12}{5}}{}^{1}(\Omega)$ に属する。よって，Hölder の不等式を用いれば

$$\|Fu\|\leqq\|u\|_{L_{12}(\Omega)}\|\mathrm{grad}\ u\|_{L_{\frac{12}{5}}(\Omega)}\leqq\|u\|_{L_{12}(\Omega)}\|u\|_{W_{\frac{12}{5}}{}^{1}(\Omega)}$$

をうる。但し

$$\|\mathrm{grad}\ u\|_{L_{\frac{12}{5}}(\Omega)}\equiv\left(\sum_{j,k}\left\|\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right\|^2_{L_{\frac{12}{5}}(\Omega)}\right)^{1/2}$$

である。埋込み

$$W_{\frac{12}{5}}{}^{1}(\Omega)\subset L_{12}(\Omega)$$

は連続であるから，

$$\|u\|_{L_{12}(\Omega)}\leqq C_1\|u\|_{W_{\frac{12}{5}}{}^{1}}(\Omega)$$

なる，Ω のみによる定数 C_1 が存在する。埋込み，

$$D(A^{\frac{5}{8}})\subset H^{\frac{5}{4}}(\Omega)\subset W_{\frac{12}{5}}{}^{1}(\Omega)$$

も連続であるから，

$$\|u\|_{W_{\frac{12}{5}}{}^{1}(\Omega)}\leqq C_2\|u\|_{H^{\frac{5}{4}}(\Omega)}=C_2\|A^{\frac{5}{8}}u\|$$

となる定数 C_2 が存在する。C_2 も Ω のみによる。故に $u\in D(A^{\frac{5}{8}})$ のとき

$$\|Fu\|\leqq C_1\|u\|^2{}_{W_{\frac{12}{5}}{}^1(\Omega)}\leqq C_1C_2{}^2\|A^{\frac{5}{8}}u\|^2$$

となる。$C_0=C_1C_2{}^2$ とおけば求める不等式を得る。

ii) $Fu-Fv=P(u\cdot\mathrm{grad})u-P(v\cdot\mathrm{grad})v=P\{(u-v)\cdot\mathrm{grad}\}u+P(v\cdot\mathrm{grad})(u-v)$

と変形して，i) と同様の評価を行えば，

$$\|Fu-Fv\|\leqq\|u-v\|_{L_{12}}\|\mathrm{grad}\ u\|_{L_{\frac{12}{5}}}+\|v\|_{L_{12}}\|\mathrm{grad}(u-v)\|_{L_{\frac{12}{5}}}$$

$$\leqq C_1\|u-v\|_{W_{\frac{12}{5}}{}^1}(\|u\|_{W_{\frac{12}{5}}{}^1}+\|v\|_{W_{\frac{12}{5}}{}^1})\leqq C_1C_2{}^2\|A^{\frac{5}{8}}(u-v)\|(\|A^{\frac{5}{8}}u\|+\|A^{\frac{5}{8}}v\|)$$

を得る。よって ii) の不等式が成立つ。　　　　　　　　　　　　　　　証明終り。

注意 4-2

作用素 F は，十分滑らかな関数に対してはもちろん意味を持つが，補題 4-1 は，u が $D(A^{\frac{5}{8}})$ の元であればよいことを示している。定理 3-1，3-2 によれば，

$$D(A^{\frac{5}{8}})=H_\sigma(\Omega)\cap\{u\in H^{\frac{5}{4}}(\Omega);\ u=0\ (x\in\partial\Omega)\}$$

であることに注意する。

§5. 解 の 存 在

$$(1\text{-}2)\qquad \begin{cases}\dfrac{du}{dt}=-Au+Fu+Pf, & t>0,\\ u(+0)=a\end{cases}$$

において，特に $Pf=0$ の場合を考察する。すなわち，対象とする方程式は，

$$(5\text{-}1)\qquad \begin{cases}\dfrac{du}{dt}=-Au+Fu, & t>0,\\ u(+0)=a\end{cases}$$

である。$T>0$ として，

$$\mathscr{S}_T=\{u:(0,\ T]\to D(A^{\frac{5}{8}})\ \text{連続};\ |||u|||_T=\sup_{0<t\leqq T}t^{\frac{3}{8}}\|A^{\frac{5}{8}}u(t)\|<+\infty\}$$

とおく。関数空間 $\mathscr{S}_T$ は，$|||\cdot|||_T$ をノルムとする完備なノルム空間となる。

補題 5-1

$\mathscr{S}_T$ にノルム $|||\cdot|||_T$ を入れると Banach 空間になる。

証明

$\{u_n\}$ は $\mathscr{S}_T$ の Cauchy 列とする。このとき，$t^{\frac{3}{8}}A^{\frac{5}{8}}u_n(t)$ は $(0,\ T]$ で連続で，t に関し一様に，$\mathrm{H}_\sigma(\Omega)$ のある元 $v(t)$ に収束する。ここで $v(t)$ は $(0,\ T]$ で連続で，$\sup_{0<t\leqq T}\|v(t)\|<+\infty$ である。$A^{-\frac{5}{8}}$ は，$H_\sigma(\Omega)$ から $D(A^{\frac{5}{8}})$ への有界作用素であるから，$t^{-\frac{3}{8}}A^{-\frac{5}{8}}v(t)$ は，

$(0,\ T]$ で定義され $D(A^{\frac{5}{8}})$ で値をとる t の連続関数である。これを $u(t)$ とおけば，

$$\sup_{0<t\leqq T}\|t^{\frac{3}{8}}A^{\frac{5}{8}}u(t)\|=\sup_{0<t\leqq T}\|v(t)\|<+\infty$$

かつ

$$|||u_n-u|||_T=\sup_{0<t\leqq T}\|t^{\frac{3}{8}}A^{\frac{5}{8}}u_n(t)-v(t)\|\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

である。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　証明終り。

解の構成に用いられる積分方程式を導入する。作用素 Φ は

$$(5\text{-}2)\qquad \begin{cases} u_0(t)=e^{-tA}a \\ \Phi u(t)=u_0(t)+\displaystyle\int_0^t e^{-(t-s)A}Fu(s)ds \qquad 0<t\leqq T \end{cases}$$

と定義される。

補題 5-2

i)　u_0，$u\in\mathscr{S}_T$ ならば $\Phi u\in\mathscr{S}_T$ で，

$$|||\Phi u|||_T\leqq |||u_0|||_T+C_0\beta_1|||u|||_T{}^2$$

が成立つ。ここで C_0 は補題 4-1 の定数，$\beta_1=B\left(\frac{3}{8},\ \frac{1}{4}\right)$（$B(\cdot,\ \cdot)$ はベータ関数）である。

ii)　u，$v\in\mathscr{S}_T$ ならば

$$|||\Phi u-\Phi v|||_T\leqq C_0\beta_1(|||u|||_T+|||v|||_T)|||u-v|||_T$$

が成立つ。

証明

i)　$u\in\mathscr{S}_T$ とする。補題 3-3 と補題 4-1 i) により，

$$\int_0^t\|A^{\frac{5}{8}}e^{-(t-s)A}Fu(s)\|ds\leqq C_0\int_0^t(t-s)^{-\frac{5}{8}}\|A^{\frac{5}{8}}u(s)\|^2ds$$

$$\leqq C_0\int_0^t(t-s)^{-\frac{5}{8}}s^{-\frac{6}{8}}ds\cdot\sup_{0<s<t}\|s^{\frac{3}{8}}A^{\frac{5}{8}}u(s)\|^2$$

となる。最右辺の積分の値は $t^{-\frac{3}{8}}B\left(\frac{3}{8},\ \frac{1}{4}\right)$ に等しいから

$$t^{\frac{3}{8}}\int_0^t\|A^{\frac{5}{8}}e^{-(t-s)A}Fu(s)\|ds\leqq C_0\beta_1|||u|||_T{}^2$$

を得る。よって i) の主張が証明された。

ii)　補題 3-3 と補題 4-1 ii) により，

$$\|A^{\frac{5}{8}}(\Phi u-\Phi v)\|\leqq\int_0^t\|A^{\frac{5}{8}}e^{-(t-s)A}\{Fu(s)-Fv(s)\}\|ds$$

$$\leqq C_0\int_0^t (t-s)^{-\frac{5}{8}}\{\|A^{\frac{5}{8}}u(s)\|+\|A^{\frac{5}{8}}v(s)\|\}\|A^{\frac{5}{8}}\{u(s)-v(s)\}\|ds$$

$$\leqq C_0\int_0^t (t-s)^{-\frac{5}{8}}s^{-\frac{6}{8}}ds(|||u|||_T+|||u|||_T)|||u-v|||_T$$

が成立つ。従って i) と同様にして，求める不等式を得る。　　証明終り。

作用素 Φ の性質をさらに調べよう。

$$r_0=4C_0\beta_1|||u_0|||_T$$

$$\mathscr{B}_T{}^0=\{u\in\mathscr{S}_T;\ |||u|||_T\leqq 2|||u_0|||_T\}$$

とおく。

命題 5-3

i) Φ は $\mathscr{B}_T{}^0$ において Lipschitz 連続である。すなわち，u, $v\in\mathscr{B}_T{}^0$ ならば，

$$|||\Phi u-\Phi v|||_T\leqq r_0|||u-v|||_T$$

が成立つ。

ii) $r_0\leqq 1$ ならば $\mathscr{B}_T{}^0$ は Φ に関し不変である。

証明

i) 補題 5-2 ii) により

$$|||\Phi u-\Phi v|||_T\leqq C_0\beta_1(|||u|||_T+|||v|||_T)|||u-v|||_T$$

であるが，u, $v\in\mathscr{B}_T{}^0$ であるから，

$$C_0\beta_1(|||u|||_T+|||v|||_T)\leqq 4C_0\beta_1|||u_0|||_T=r_0$$

となる。よって i) が示された。

ii) $u\in\mathscr{B}_T{}^0$ とする。補題 5-2 i) により

$$|||\Phi u|||_T\leqq|||u_0|||_T+C_0\beta_1|||u|||_T{}^2\leqq|||u_0|||_T+4C_0\beta_1|||u_0|||_T{}^2$$

であるが，$r_0=4C_0\beta_1|||u_0|||_T\leqq 1$ であるから

$$|||\Phi u|||_T\leqq|||u_0|||_T+|||u_0|||_T=2|||u_0|||_T$$

となる。よって $\Phi u\in\mathscr{B}_T{}^0$ である。　　証明終り。

命題 5-4

$r_0\equiv 4C_0\beta_1|||u_0|||_T<1$ なる T に対して，Φ は $\mathscr{B}_T{}^0$ にただ1つ不動点を持つ。

証明

前命題より明らかである。　　証明終り。

注意 5-5

条件 $r_0<1$ がどのような場合に成立つかを調べよう。補題 3-3 ii) によれば，

$$\|t^{\frac{3}{8}}A^{\frac{5}{8}}e^{-tA}a\|\to 0 \qquad (t\to 0)$$

であるから，$r_0\equiv 4C_0\beta_1\sup_{0<t<T}\|t^{\frac{3}{8}}A^{\frac{5}{8}}e^{-tA}a\|<1$

が成立つような $T=T(a)$ は必ず存在する。これは，任意の初期値 a に対して，(5-1)の局所

解が存在することを示す。$a\in D(A^{\frac{1}{4}})$ の場合には，補題 3-3 i) により，

$$\|t^{\frac{3}{8}}A^{\frac{5}{8}}e^{-tA}a\|=\|t^{\frac{3}{8}}A^{\frac{3}{8}}e^{-tA}A^{\frac{1}{4}}a\|\leqq\|A^{\frac{1}{4}}a\|$$

である。従って，$\|A^{\frac{1}{4}}a\|$ が十分小さく，

(5-3)　$4C_0\beta_1\|A^{\frac{1}{4}}a\|<1$

が成立てば，$T=+\infty$ ととれる。これは (5-1) の大域解が存在することを示す。a がもう少し良い性質を持つ場合，すなわち，$a\in D(A^{\frac{1}{4}+\varepsilon})$ $(\varepsilon>0)$ のときは，

$$\|t^{\frac{3}{8}}A^{\frac{5}{8}}e^{-tA}A\|=\|t^{\varepsilon}\cdot t^{\frac{3}{8}-\varepsilon}A^{\frac{3}{8}-\varepsilon}e^{-tA}A^{\frac{1}{4}+\varepsilon}a\|\leqq T^{\varepsilon}\|A^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\|$$

であるから，

$$T^{\varepsilon}<(4C_0\beta_1\|A^{\frac{1}{4}+\varepsilon}a\|)^{-1}$$

なる $T>0$ に対して，$r_0<1$ が成立つ。

命題 5-4 で求めた Φ の不動点 u の性質を調べよう。$\Phi u=u$ である。$\varepsilon>0$ を任意とする。$A^{\frac{5}{8}}u(t)$ は閉区間〔ε, T〕で有界であるから，補題 4-1 i) により $Fu(t)$ も〔ε, T〕で有界となる。従って，補題 3-5 により

$$\int_{\varepsilon}^{t}A^{\alpha}e^{-(t-s)A}Fu(s)ds \qquad (0<\alpha<1)$$

は，〔ε, T〕上で $1-\alpha$ 次 Hölder 連続である。ところで，$t>\varepsilon$ に対して，

(5-4)　$$u(t)=e^{-(t-\varepsilon)A}u(\varepsilon)+\int_{\varepsilon}^{t}e^{-(t-s)A}Fu(s)ds$$

が成立つことを思い出そう。任意の正数 ε' に対して; $e^{-\varepsilon' A}u(\varepsilon)\in D(A)$ であるから，〔$\varepsilon+\varepsilon'$, T〕上で $A^{\alpha}e^{-(t-\varepsilon)A}u(\varepsilon)$ は $1-\alpha$ 次 Hölder 連続であることが，補題 3-4 より示せる。よって〔$\varepsilon+\varepsilon'$, T〕上で $A^{\alpha}u(t)$ も $1-\alpha$ 次 Hölder 連続である。ここで $\alpha=\dfrac{3}{8}$ として，補題 4-1 ii) を用いれば，$Fu(t)$ は $\dfrac{3}{8}$ 次 Hölder 連続であることがわかる。従って，補題 3-6 により

$$w(t)=\int_{\varepsilon+\varepsilon'}^{t}e^{-(t-s)A}Fu(s)ds$$

は $D(A)$ に属し，$Aw(t)$ は〔$\varepsilon+\varepsilon'$, T〕上で $\dfrac{3}{8}$ 次 Hölder 連続である。よって $Au(t)$ も〔$\varepsilon+\varepsilon'$, T〕上で $\dfrac{3}{8}$ 次 Hölder 連続である。ε, ε' の任意性により，次の命題を得た。

命題 5-6

Φ の不動点を u, ε を任意の正数, $0<\alpha<1$ とする。このとき $Au(t)$ は〔ε, T〕上で $\dfrac{3}{8}$ 次 Hölder 連続，$A^{\alpha}u(t)$ は $1-\alpha$ 次 Hölder 連続である。

注意 5-7

A の負巾が有界作用素であることに注意すれば，$A^{\alpha}u(t)$ は必ず $\frac{3}{8}$ 次 Hölder 連続である。

次に，この u が方程式 (5-1) をみたすことを示そう。

$$v(t)=\int_0^t e^{-(t-s)A}Fu(s)ds$$

とおく。$t>0$，$h>0$ として，

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\{v(t+h)-v(t)\}&=\frac{1}{h}\int_0^t\{e^{-(t+h-s)A}-e^{-(t-s)A}\}Fu(s)ds\\&\quad+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}e^{-(t+h-s)A}\{Fu(s)-Fu(t)\}ds+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}e^{-(t+h-s)A}Fu(t)ds\\&=I_1+I_2+I_3\end{aligned}$$

と分解する。まず I_1 を変形して，

$$I_1=\frac{e^{-hA}-1}{h}\int_0^t e^{-(t-s)A}Fu(s)ds=\frac{e^{-tA}-1}{h}v(t)$$

となるが，命題 5-6 によれば，$t>0$ に対しては $v(t)\in D(A)$ であるから

$$I_1\to -Av(t)\qquad(h\to 0)$$

を得る。I_3 については，

$$I_3=\frac{1}{h}\int_0^h e^{-(h-s)A}Fu(t)ds\to Fu(t)\qquad(h\to 0)$$

も明らかであろう。$F(t)$ は，$\frac{3}{8}$ 次 Hölder 連続：

$$\|Fu(t)-Fu(s)\|\leqq c|t-s|^{\frac{3}{8}}$$

であるから，I_2 のノルムは，

$$\|I_2\|\leqq\frac{c}{h}\int_t^{t+h}|t-s|^{\frac{3}{8}}ds=\frac{8}{11}\cdot ch^{\frac{3}{8}}$$

となる。従って

$$I_2\to 0\qquad(h\to 0)$$

を得る。以上より

$$\frac{1}{h}\{v(t+h)-v(t)\}\to -Av(t)+Fu(t)\qquad(h\to 0)$$

すなわち，v の右微分 $\frac{d^+}{dt}v$ に関して，

$$\frac{d^+}{dt}v(t)=-Av(t)+Fu(t),\qquad t>0$$

が成立つ。一方 u_0 については，

$$\frac{d^+}{dt}u_0(t)=\frac{d}{dt}e^{-tA}a=-Ae^{-tA}a$$

であるから,

$$\frac{d^+}{dt}u(t)=-Au(t)+Fu(t)$$

を得る。この右辺は，既に調べたように，連続（実は Hölder 連続）であるから,

$$\frac{d^+}{dt}u(t)=\frac{d}{dt}u(t)$$

である（追記参照のこと）。すなわち，$u(t)$ は方程式

$$\text{(5-5)} \quad \frac{du}{dt}=-Au+Fu$$

をみたす。$\lim_{t\to+0} u(t)=a$ は，積分表示 (5-2) より明らかである。従って $u(t)$ は (5-1) の解であることが示された。既に述べたように $-Au(t)+Fu(t)\in C^{\frac{3}{8}}([\varepsilon,\ T]:H_\sigma)$ であるから (5-5) より $u(t)\in C^{1+\frac{3}{8}}([\varepsilon,\ T]:H_\sigma)$ を得る。以上により，次の定理が証明された。

定理 5-8

$r_0\equiv 4C_0\beta_1|||u_0|||_T<1$ なる $T>0$ に対して，方程式 (5-1) をみたす $u(t)$ が $\mathscr{B}_T{}^0$ にただ1つ存在する。さらに，任意の $\alpha(0<\alpha<1)$，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$A^\alpha u(t)\in C^{1-\alpha}([\varepsilon,T]:H_\sigma(\Omega))$，$Au(t)\in C^{\frac{3}{8}}([\varepsilon,\ T];H_\sigma(\Omega))$，$u(t)\in C^{1+\frac{3}{8}}([\varepsilon,\ T]:H_\sigma(\Omega))$ が成立つ。

§6.　$Pf\neq 0$ の場合

方程式

$$\text{(6-1)} \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}=-Au+Fu+Pf, & t>0, \\ u(+0)=a \end{cases}$$

の解を $\mathscr{S}_T$ に求めよう。

$$u_0=e^{-tA}a$$

$$\Psi u(t)=u_0(t)+\int_0^t e^{-(t-s)A}\{Fu(s)+Pf(s)\}ds=\Phi u(t)+\int_0^t e^{-(t-s)A}Pf(s)ds$$

とする。f は次の二条件：

(6-2)　$\|t^{\frac{3}{4}}Pf(t)\|$ は $[0,\ T]$ で有界，かつ $\|t^{\frac{3}{4}}Pf(t)\|\to 0$　$(t\to 0)$

(6-3)　$\gamma>0$ が存在して，$Pf(t)$ は $(0,\ T]$ で γ 次 Hölder 連続

をみたすとする。このとき§5と同様にして，以下の結果を示すことが出来る。証明は省略する。

補題 6-1

i)　u_0，$u\in\mathscr{S}_T$ とし，f は (6-2) をみたすとする。このとき Ψu は $\mathscr{S}_T$ に属し,

$$|||\Psi u|||_T\leqq|||u_0|||_T+C_0\beta_1|||u|||_T{}^2+\nu_T(f)$$

が成立つ。但し $\nu_T(f)=\beta_1\sup_{0<t<T}\|t^{\frac{3}{4}}Pf(t)\|$ である。

ii)　u，$v\in\mathscr{S}_T$ ならば

$$|||\Psi u-\Psi v|||_T\leqq C_0\beta_1(|||u|||_T+|||v|||_T)|||u-v|||_T$$

が成立つ。

§5にならって，

$$r=4C_0\beta_1(|||u_0|||_T+\nu_T(f))$$

$$\mathscr{B}_T=\{v\in\mathscr{S}_T;\ |||v|||_T\leqq 2(|||u_0|||_T+\nu_T(f))\}$$

としよう。

命題 6-2

i) Ψ は $\mathscr{B}_T$ において Lipschitz 連続である。u, $v\in\mathscr{B}_T$ ならば

$$|||\Psi u-\Psi v|||_T\leqq r|||u-v|||_T$$

が成立つ。

ii) $r\leqq 1$ ならば $\mathscr{B}_T$ は Ψ に関して不変である。すなわち $u\in\mathscr{B}_T$ ならば $\Psi u\in\mathscr{B}_T$ である。

命題 6-3

$r<1$ なる T に対して，Ψ は $\mathscr{B}_T$ にただ1つの不動点を持つ。

注意 6-4

$r<1$ となる場合を調べよう。$|||u_0|||_T$ が“小さく”なるための条件は，注意 5-5 で述べた。$\nu_T(f)$ については，仮定（6-2）より

$$\|t^{\frac{3}{4}}Pf(t)\|\to 0 \qquad (t\to 0)$$

であるから，$r<1$ となる $T>0$ が必ず存在する。特に $a\in D(A^{\frac{1}{4}})$ で

$$4C_0\beta_1(\|A^{\frac{1}{4}}a\|+\beta_1\sup_{0<t<+\infty}\|t^{\frac{3}{4}}Pf(t)\|)<1$$

が成立てば，$T=+\infty$ ととれる。これは，(6-1) の大域解の存在を示している。

定理 6-5

f は (6-2)，(6-3) をみたすとする。

$r\equiv 4C_0\beta_1(|||u_0|||_T+\nu_T(f))<1$ なる $T>0$ に対して，方程式 (6-1) をみたす $u(t)$ が $\mathscr{B}_T$ にただ1つ存在する。さらに任意の $\varepsilon>0$，任意の $\alpha(0<\alpha<1)$ に対して，$A^\alpha u(s)\in C^{1-\alpha}([\varepsilon, T]; H_\sigma(\Omega))$，$Au(t)\in C^\theta([\varepsilon, T]; H_\sigma(\Omega))$，$u(t)\in C^{1+\theta}([\varepsilon, T]; H_\sigma(\Omega))$ が成立つ。但し $\theta=\mathrm{mim}\left(\gamma, \frac{3}{8}\right)$ である。

注意 6-6

〔2〕の定理 4-3 では，$\theta=\min\left(\gamma, \frac{1}{4}\right)$ が示されている。上の定理 6-5 はこの一改良となっている。

追記

§5において，連続関数 $u(t)$ の右微分 $\frac{d^+}{dt}u(t)$ が連続ならば，微分 $\frac{d}{dt}u(t)$ が存在して

$$(A\text{-}1)\quad \frac{d}{dt}u(t)=\frac{d^+}{dt}u(t)$$

が成立つことを用いた。これを証明しておく。$\frac{d^+}{dt}u(t)$ は積分可能であるから，

$$v(t)=\int_0^t \frac{d^+}{dt}u(t)dt$$

とおこう。これは t の連続関数で，t について一回微分可能で

$$\frac{d}{dt}v(t)=\frac{d^+}{dt}v(t)=\frac{d^+}{dt}u(t)$$

が成立つ。$u(t)-v(t)=w(t)$ とおけば，$w(t)$ は t について連続で，

$$\frac{d^+}{dt}w(t)=\frac{d^+}{dt}u(t)-\frac{d^+}{dt}v(t)=0$$

である。Kato〔6〕Ⅲ. Lemma 1.36 により $w(t)$ は定ベクトルでなければならない。$w(t)=a$ とすれば $u(t)=v(t)+a$ となる。よって $u(t)$ は1回微分可能で，(A-1) が成立つ。

参考文献

〔1〕 A. P. Calderón: Intermediate spaces and interpolation, the complex method, Studia Math., **24**, 113–190 (1964).

〔2〕 H. Fujita and T. Kato: On the Navier-Stokes initial value problem I, Arch. Rat. Mech. Anal., **19**, 269–315 (1964)

〔3〕 H. Fujita and H. Morimoto: On the fractional powers of the Stokes operator, Proc. Japan Acad., **46**, 1141–1143 (1970).

〔4〕 D. Fujiwara: Concrete characterization of the domains of fractional powers of some elliptic differential operators of the second order, Proc. Japan Acad., **43**, 82–86 (1967).

〔5〕 T. Kato: A generalization of the Heinz inequality, Proc. Japan Acad., **37**, 305–308 (1961).

〔6〕 T. Kato: Perturbation Theory for Linear Operators, Springer, Berlin, 1966.

〔7〕 森本・藤田，Stokes 作用素等の分数巾の定義域について，京大数解研講究録 **136** (1972).

〔8〕 T. Muramatsu: On Besov spaces and Sobolev spaces of generalized functions defined on a general region, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **9**, 325–396 (1974).